第43講　総合問題(3)

1　a，bを定数とし，$a \neq 0$とする．連立1次方程式 $\begin{cases} 2x+(a-1)y=b \\ ax+a^2y=1 \end{cases}$ ……(☆)

について，次の問いに答えよ．

(1)　(☆)が2組以上の解をもつようなaとbの値を求めよ．

(2)　(☆)が$x=1$，$y=2$をただ1組の解としてもつようなaとbの値を求めよ．

(3)　(☆)が$x=y$なる解をもつためのaとbの値に関する必要十分条件を求めよ．

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2 [1]　整数 x, y, z は次の連立方程式を満たす.

$$\frac{1}{xy}+\frac{1}{yz}+\frac{1}{zx}=\frac{1}{xy+yz+zx} \qquad 2^{x+1}=\frac{5^{2y}}{10^{z+1}}$$

このとき, x, y, z の値を求めよ.

[2]　方程式 $(\log_4 x)^2=\log_4\frac{x^2}{2}$ の2つの解を α, β（ただし $\alpha>\beta$）とする.

(1)　積 $\alpha\beta$ の値を求めよ.

(2)　$(\log_4\alpha-\log_4\beta)^2$ の値を求めよ.

(3)　$\frac{\alpha}{\beta}<8$ を示せ.

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

3 座標平面上で $y=-ax+a$ $(a>0)$ で表される直線を l，$y=a^3x$ で表される直線を m とし，2 直線の交点を $\mathrm{A}(x_1,\ y_1)$ とする．$0<x<x_1$ の範囲で，直線 l 上の点 B，直線 m 上の点 C が移動し，点 B，C および y 軸上の点 D，E を頂点とする長方形 BCDE の面積を S とする．

(1) a を一定とした場合，S がとりうる最大値を a を用いて表せ．

(2) a が $a>0$ を満たしながら変化するとき，S の最大値と，そのときの a の値を求めよ．

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第 43 講　総合問題(3)

［1］　連立方程式 $\begin{cases} x-(a+6)y=1 \\ ax-8(a+1)y=-2 \end{cases}$ は $a=$ **ア** のとき解が存在せず，$a=-$ **イ** のとき解が無数に存在する．$a\neq$ **ア** かつ $a\neq-$ **イ** のときは解がただ 1 つ存在し，その解 $(x,\ y)$ がともに整数になるときの a の値は $a=$ **ウ** ，**エ** （ただし **ウ** $<$ **エ** ）である．

［2］　方程式 $12(\log_8 x)^2-28\log_8 x+3=0$ の 2 つの解を s，t とするとき，$st=$ **オカキ** である．

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第 43 講　総合問題(3)

1　a，b を定数とし，$a \neq 0$ とする．連立１次方程式 $\begin{cases} 2x+(a-1)y=b \\ ax+a^2y=1 \end{cases}$ ……(☆)

について，次の問いに答えよ．

(1)　(☆) が２組以上の解をもつような a と b の値を求めよ．

(2)　(☆) が $x=1$，$y=2$ をただ１組の解としてもつような a と b の値を求めよ．

(3)　(☆) が $x=y$ なる解をもつための a と b の値に関する必要十分条件を求めよ．

$$\begin{cases} 2x+(a-1)y=b & \cdots\cdots① \\ ax+a^2y=1 & \cdots\cdots② \end{cases} \cdots\cdots(☆)$$

(1)　①×a^2−②×$(a-1)$ より

$a(a+1)x=a^2b-a+1$　……③　$(a \neq 0)$

$a=-1$ のとき　$0 \cdot x=b+2$

よって　$b+2=0$　つまり　$b=-2$ であれば③は無数に解をもち，

このとき (☆) は２組以上の解をもつ．

$b \neq -2$ のとき　③は解をもたず不適．

$a \neq -1$ のとき　③はただ１つの解 $x=\dfrac{a^2b-a+1}{a(a+1)}$ をもち不適．

以上より　$\boldsymbol{a=-1}$**，**$\boldsymbol{b=-2}$

(2)　①，②に $x=1$，$y=2$ を代入して

$2+2(a-1)=b$　……④　　　$a+2a^2=1$　……⑤

⑤より　$(2a-1)(a+1)=0$

(1)より　$a \neq -1$　　よって　$\boldsymbol{a=\dfrac{1}{2}}$　このとき④より　$\boldsymbol{b=1}$

(3)　①，②が共通解 $x=y=\alpha$ をもつとすると

$2\alpha+(a-1)\alpha=b$，　$a\alpha+a^2\alpha=1$

つまり　$(a+1)\alpha=b$　……①′，　$a(a+1)\alpha=1$　……②′

①′×a−② より　$0=ab-1$

よって①，②が共通解 $x=y=\alpha$ をもつためには $ab=1$ であることが必要．

$ab=1$ のとき，$b=\dfrac{1}{a}$　$(a \neq 0)$　　このとき③から　$a(a+1)x=1$

これが解をもつのは　$a \neq -1$ のときであり，このとき (☆) は解 $x=y=\dfrac{1}{a(a+1)}$ をもつ．

したがって，(☆) が $x=y$ なる解をもつための必要十分条件は

$\boldsymbol{ab=1}$ **かつ** $\boldsymbol{a \neq -1}$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2 ［1］ 整数 x，y，z は次の連立方程式を満たす．

$$\frac{1}{xy}+\frac{1}{yz}+\frac{1}{zx}=\frac{1}{xy+yz+zx} \qquad 2^{x+1}=\frac{5^{2y}}{10^{z+1}}$$

このとき，x，y，z の値を求めよ．

$2^{x+1}=\dfrac{5^{2y}}{10^{z+1}}$　より　$2^{x+1}=\dfrac{5^{2y}}{2^{z+1}\cdot 5^{z+1}}$　　　$2^{x+z+2}=5^{2y-z-1}$

x，y，z は整数より　$x+z+2=0$ かつ $2y-z-1=0$

つまり　$z=2y-1$，$x=-z-2=-2y-1$　……①

$\dfrac{1}{xy}+\dfrac{1}{yz}+\dfrac{1}{zx}=\dfrac{1}{xy+yz+zx}$　より　$\dfrac{x+y+z}{xyz}=\dfrac{1}{(x+z)y+zx}$

$x+z=-2$　より　$\dfrac{y-2}{xyz}=\dfrac{1}{-2y+zx}$　　　$(y-2)(-2y+zx)=xyz$

$-2y^2+xyz+4y-2zx=xyz$

$y^2-2y+zx=0$　これに①を代入して

$y^2-2y-(2y-1)(2y+1)=0$　　$3y^2+2y-1=0$

$(3y-1)(y+1)=0$　　よって　$y=\dfrac{1}{3}$，-1

x，y，z は整数より①から　$\boldsymbol{(x,\ y,\ z)=(1,\ -1,\ -3)}$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2 ［2］ 方程式 $(\log_4 x)^2=\log_4 \dfrac{x^2}{2}$ の 2 つの解を α, β（ただし $\alpha>\beta$）とする.

(1) 積 $\alpha\beta$ の値を求めよ.

(2) $(\log_4\alpha-\log_4\beta)^2$ の値を求めよ.

(3) $\dfrac{\alpha}{\beta}<8$ を示せ.

(1) $(\log_4 x)^2=\log_4\dfrac{x^2}{2}$ ……① について，真数は正より　$x>0$

このとき①より　$(\log_4 x)^2=2\log_4 x-\log_4 2$

$\log_4 x=t$　とおくと，$t^2=2t-\dfrac{\log_2 2}{\log_2 4}$　　つまり　$2t^2-4t+1=0$ ……②

方程式①の 2 解が $x=\alpha$, β より，

t の方程式の 2 解は　$t=\log_4\alpha$, $\log_4\beta$

よって，解と係数の関係より

$\log_4\alpha+\log_4\beta=2$ ……③，$(\log_4\alpha)(\log_4\beta)=\dfrac{1}{2}$ ……④

③より　$\log_4\alpha\beta=2$　　よって　$\boldsymbol{\alpha\beta=4^2=16}$

(2) $\boldsymbol{(\log_4\alpha-\log_4\beta)^2}=(\log_4\alpha+\log_4\beta)^2-4(\log_4\alpha)(\log_4\beta)$

$=2^2-4\times\dfrac{1}{2}=\mathbf{2}$

(3) $\alpha>\beta$ より　$\log_4\alpha>\log_4\beta$

よって(2)より　$\log_4\alpha-\log_4\beta=\sqrt{2}$ (>0)

つまり　$\log_4\dfrac{\alpha}{\beta}=\sqrt{2}$　より　$\dfrac{\alpha}{\beta}=4^{\sqrt{2}}<4^{\frac{3}{2}}=2^3=8$　　したがって　$\dfrac{\alpha}{\beta}<8$

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

3　座標平面上で $y=-ax+a$ $(a>0)$ で表される直線を l，$y=a^3x$ で表される直線を m とし，2 直線の交点を $\mathrm{A}(x_1,\ y_1)$ とする．$0<x<x_1$ の範囲で，直線 l 上の点 B，直線 m 上の点 C が移動し，点 B，C および y 軸上の点 D，E を頂点とする長方形 BCDE の面積を S とする．

(1) a を一定とした場合，S がとりうる最大値を a を用いて表せ．

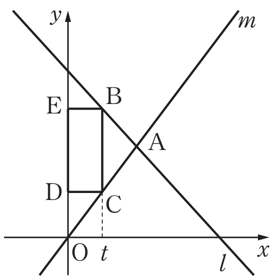
(2) a が $a>0$ を満たしながら変化するとき，S の最大値と，そのときの a の値を求めよ．

(1) $l：y=-ax+a=-a(x-1)$ と $m：y=a^3x$ $(a>0)$ より

$$-ax+a=a^3x \qquad -x+1=a^2x \qquad (a^2+1)x=1 \qquad x=\frac{1}{a^2+1}$$

よって 2 直線 l，m の交点 A の x 座標は　$x_1=\dfrac{1}{a^2+1}$

右図において，2 点 B，C の x 座標を t とすると



$0<t<\dfrac{1}{a^2+1}$

このとき点 B，C の y 座標はそれぞれ $-at+a$，a^3t　より

$$S=\{(-at+a)-a^3t\}\cdot t$$
$$=-a(a^2+1)t^2+at$$
$$=-a(a^2+1)\left\{t-\frac{1}{2(a^2+1)}\right\}^2+\frac{a}{4(a^2+1)}$$

$0<t<\dfrac{1}{a^2+1}$ における S の最大値は　$\boldsymbol{\dfrac{a}{4(a^2+1)}}$　$\left(t=\dfrac{1}{2(a^2+1)}\ \text{のとき}\right)$

(2) $S=\dfrac{a}{4(a^2+1)}$ (>0) が最大になるのは $\dfrac{4(a^2+1)}{a}$ が最小となるときである．

$a>0$ より，(相加平均)≧(相乗平均) の関係から

$$\frac{4(a^2+1)}{a}=4\left(a+\frac{1}{a}\right)\geqq 4\cdot 2\sqrt{a\cdot\frac{1}{a}}=8$$

等号成立は　$a=\dfrac{1}{a}$　つまり　$a=1$ のとき

よって　$\boldsymbol{a=1}$ のとき $\dfrac{4(a^2+1)}{a}$ は最小値 8 をとり，

このとき　S は最大値 $\boldsymbol{\dfrac{1}{8}}$ をとる．

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第43講　総合問題(3)

[1]　連立方程式 $\begin{cases} x-(a+6)y=1 \\ ax-8(a+1)y=-2 \end{cases}$ は $a=$ [ア] のとき解が存在せず，$a=-$ [イ] のとき解が無数に存在する．$a\neq$ [ア] かつ $a\neq-$ [イ] のときは解がただ1つ存在し，その解 $(x,\ y)$ がともに整数になるときの a の値は $a=$ [ウ]，[エ]（ただし [ウ] < [エ]）である．

[2]　方程式 $12(\log_8 x)^2-28\log_8 x+3=0$ の2つの解を s，t とするとき，$st=$ [オカキ] である．

解答例

[1]　$\begin{cases} x-(a+6)y=1 & \cdots\cdots① \\ ax-8(a+1)y=-2 & \cdots\cdots② \end{cases}$

①×a－②より　$(-a^2+2a+8)y=a+2$

つまり　$-(a+2)(a-4)y=a+2$　……③

$a=\mathbf{4}$ のとき　③は $0\cdot y=6$ より　これを満たす y は存在せず，連立方程式の解も存在しない．

$a=-\mathbf{2}$ のとき　③は $0\cdot y=0$ より　これを満たす y は無数に存在し，それに対応する x も無数に存在する．つまり，連立方程式の解も無数に存在する．

$a\neq 4$ かつ $a\neq -2$ のとき　③より　$y=-\dfrac{1}{a-4}$　このとき $x=-\dfrac{10}{a-4}$

つまり，解がただ1つ存在する．この解が整数になるのは，a が整数であることより

$a-4=\pm 1$　　つまり　$a=\mathbf{3}$，$\mathbf{5}$ のときである．

[2]　$\log_8 x=X$ とおくと，$12X^2-28X+3=0$ の解が $X=\log_8 s$，$\log_8 t$ である．

よって解と係数の関係より

$\log_8 s+\log_8 t=\dfrac{28}{12}=\dfrac{7}{3}$　　$\log_8 st=\dfrac{7}{3}$

したがって　$st=8^{\frac{7}{3}}=(2^3)^{\frac{7}{3}}=2^7=\mathbf{128}$ である．

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。